

3 次方程式の解の公式を求める

3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (a, b, c, d は実数定数、 $a \neq 0$) の解を求める。

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

ここで二次の項を無くすために

$$y = \frac{b}{3a} + x \quad \Rightarrow \quad x = y - \frac{b}{3a} \tag{1}$$

と置く。 $(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$ 、 $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ なので、

$$\left(y^3 - \frac{b}{a}y^2 + \frac{b^2}{3a^2}y - \frac{b^3}{3^3a^3}\right) + \frac{b}{a}\left(y^2 - \frac{2b}{3a}y + \frac{b^2}{3^2a^2}\right) + \frac{c}{a}\left(y - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} = 0$$

$$y^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)y + \frac{2b^3}{3^3a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0$$

ここで

$$A_1 = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}, \quad A_2 = \frac{2b^3}{3^3a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}$$

と置くと、

$$\begin{aligned} y^3 + A_1y + A_2 &= 0 \\ y^3 &= -A_1y - A_2 \end{aligned} \tag{2}$$

更に、

$$u + v = y \tag{3}$$

$$uv = \beta \tag{4}$$

と置く (β は現時点では未定の複素定数)。

$$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = \underbrace{u^3 + v^3 + 3uv(u+v)}_{\text{ここに式 (4)、(2)、(3) を代入}} = y^3$$

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 + 3\beta(u+v) &= -A_1y - A_2 = -A_1(u+v) - A_2 \\ u^3 + v^3 + (3\beta + A_1)(u+v) &= -A_2 \end{aligned} \tag{5}$$

$3\beta + A_1 = 0$ となるように、 β を

$$\beta = -\frac{1}{3}A_1$$

と決める (この時点で A_1 は複素数ではないので、 β も複素数ではなくなった) と、式 (5) と (4) より

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -A_2 \\ uv = -\frac{1}{3}A_1 \end{cases} \xrightarrow{(uv)^3 \text{して}} \begin{cases} u^3 + v^3 = -A_2 \\ u^3v^3 = -\frac{1}{3^3}A_1^3 \end{cases} \tag{6}$$

二次方程式 $(az^2 + bz + c = 0)$ の解 (z_1, z_2) と係数 (a, b, c) の関係

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= -\frac{b}{a} \Rightarrow z_1 + z_2 = -b \quad (a = 1 \text{ の場合}) \\ z_1 z_2 &= \frac{c}{a} \Rightarrow z_1 z_2 = c \quad (a = 1 \text{ の場合}) \end{aligned}$$

を使用して $z_1 = u^3, z_2 = v^3$ と考えると、式 (6) より u^3, v^3 を解とする二次方程式が立てられるので、

$$\begin{aligned} z^2 + A_2 z - \frac{1}{3^3} A_1^3 &= 0 \\ z &= \frac{1}{2} \left(-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 + \frac{2^2}{3^3} A_1^3} \right) \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -\frac{1}{2} A_2 + \frac{1}{2} \sqrt{A_2^2 + \frac{2^2}{3^3} A_1^3} \\ z_2 = -\frac{1}{2} A_2 - \frac{1}{2} \sqrt{A_2^2 + \frac{2^2}{3^3} A_1^3} \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= z_1^{\frac{1}{3}}, \quad u_2 = \omega z_1^{\frac{1}{3}}, \quad u_3 = \omega^2 z_1^{\frac{1}{3}} \\ v_1 &= z_2^{\frac{1}{3}}, \quad v_2 = \omega z_2^{\frac{1}{3}}, \quad v_3 = \omega^2 z_2^{\frac{1}{3}} \\ \text{但し、} \omega &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad \omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \quad (\omega^3 = 1, \omega + \omega^2 = -1) \end{aligned}$$

式 (6) で uv を $u^3 v^3$ としたために発生した冗長性について考える。

$$\begin{aligned} z_1^{\frac{1}{3}} z_2^{\frac{1}{3}} &= \left\{ -\frac{1}{2} A_2 + \frac{1}{2} \sqrt{A_2^2 + \frac{2^2}{3^3} A_1^3} \right\}^{\frac{1}{3}} \left\{ -\frac{1}{2} A_2 - \frac{1}{2} \sqrt{A_2^2 + \frac{2^2}{3^3} A_1^3} \right\}^{\frac{1}{3}} \\ &= \left\{ \frac{1}{2^2} A_2^2 - \frac{1}{2^2} \left(A_2^2 + \frac{2^2}{3^3} A_1^3 \right) \right\}^{\frac{1}{3}} = \left(-\frac{1}{3^3} A_1^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= -\frac{1}{3} A_1, \quad -\frac{\omega}{3} A_1, \quad -\frac{\omega^2}{3} A_1 \end{aligned} \quad (8)$$

3通りの解が得られる。次に、 u, v の組み合わせを考える。

$$\begin{array}{lll} u_1 v_1 = z_1^{\frac{1}{3}} z_2^{\frac{1}{3}} & u_1 v_2 = \omega z_1^{\frac{1}{3}} z_2^{\frac{1}{3}} & u_1 v_3 = \omega^2 z_1^{\frac{1}{3}} z_2^{\frac{1}{3}} \\ u_2 v_1 = \omega z_1^{\frac{1}{3}} z_2^{\frac{1}{3}} & u_2 v_2 = \omega^2 z_1^{\frac{1}{3}} z_2^{\frac{1}{3}} & u_2 v_3 = z_1^{\frac{1}{3}} z_2^{\frac{1}{3}} \\ u_3 v_1 = \omega^2 z_1^{\frac{1}{3}} z_2^{\frac{1}{3}} & u_3 v_2 = z_1^{\frac{1}{3}} z_2^{\frac{1}{3}} & u_3 v_3 = \omega z_1^{\frac{1}{3}} z_2^{\frac{1}{3}} \end{array}$$

(1) $z_1^{\frac{1}{3}} z_2^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3} A_1$ の場合

$u_i v_k = \omega z_1^{\frac{1}{3}} z_2^{\frac{1}{3}}, \omega^2 z_1^{\frac{1}{3}} z_2^{\frac{1}{3}}$ は β が複素数ではないため、式 (4) を満たさないので、

$$(u, v) = (z_1^{\frac{1}{3}}, z_2^{\frac{1}{3}}), (\omega z_1^{\frac{1}{3}}, \omega^2 z_2^{\frac{1}{3}}), (\omega^2 z_1^{\frac{1}{3}}, \omega z_2^{\frac{1}{3}})$$

式 (3) と (1) より、

$$\begin{aligned} y &= u + v = s z_1^{\frac{1}{3}} + t z_2^{\frac{1}{3}} \\ \therefore x &= -\frac{b}{3a} + s z_1^{\frac{1}{3}} + t z_2^{\frac{1}{3}} \quad (s, t) = (1, 1), (\omega, \omega^2), (\omega^2, \omega) \end{aligned}$$

(2) $z_1^{\frac{1}{3}} z_2^{\frac{1}{3}} = -\frac{\omega}{3} A_1$ の場合

$u_i v_k = z_1^{\frac{1}{3}} z_2^{\frac{1}{3}}$ 、 $\omega z_1^{\frac{1}{3}} z_2^{\frac{1}{3}}$ は β が複素数ではないため、式 (4) を満たさないので、

$$(u, v) = (z_1^{\frac{1}{3}}, \omega^2 z_2^{\frac{1}{3}}), (\omega z_1^{\frac{1}{3}}, \omega z_2^{\frac{1}{3}}), (\omega^2 z_1^{\frac{1}{3}}, z_2^{\frac{1}{3}})$$

$$y = s z_1^{\frac{1}{3}} + t z_2^{\frac{1}{3}} \quad x = -\frac{b}{3a} + s z_1^{\frac{1}{3}} + t z_2^{\frac{1}{3}} \quad (s, t) = (1, \omega^2), (\omega, \omega), (\omega^2, 1)$$

(3) $z_1^{\frac{1}{3}} z_2^{\frac{1}{3}} = -\frac{\omega^2}{3} A_1$ の場合

$u_i v_k = z_1^{\frac{1}{3}} z_2^{\frac{1}{3}}$ 、 $\omega^2 z_1^{\frac{1}{3}} z_2^{\frac{1}{3}}$ は β が複素数ではないため、式 (4) を満たさないので、

$$(u, v) = (z_1^{\frac{1}{3}}, \omega z_2^{\frac{1}{3}}), (\omega z_1^{\frac{1}{3}}, z_2^{\frac{1}{3}}), (\omega^2 z_1^{\frac{1}{3}}, \omega^2 z_2^{\frac{1}{3}})$$

$$y = s z_1^{\frac{1}{3}} + t z_2^{\frac{1}{3}} \quad x = -\frac{b}{3a} + s z_1^{\frac{1}{3}} + t z_2^{\frac{1}{3}} \quad (s, t) = (1, \omega), (\omega, 1), (\omega^2, \omega^2)$$

z_i を実際に解いてみる。式 (7) の各要素は、

$$-\frac{1}{2} A_2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{2b^3}{3^3 a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \right) = \frac{1}{2^3 3^3 a^3} \left(-2^2 3^3 a^2 d + 2^2 3^2 abc - 2^3 b^3 \right) \equiv \frac{1}{2^3 3^3 a^3} X$$

$$A_2^2 = \left(\frac{2b^3}{3^3 a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \right) \left(\frac{2b^3}{3^3 a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \right)$$

$$= \frac{2^2 b^6}{3^6 a^6} - \frac{2b^4 c}{3^4 a^5} + \frac{2b^3 d}{3^3 a^4} - \frac{2b^4 c}{3^4 a^5} + \frac{b^2 c^2}{3^2 a^4} - \frac{bcd}{3a^3} + \frac{2b^3 d}{3^3 a^4} - \frac{bcd}{3a^3} + \frac{d^2}{a^2}$$

$$= \frac{2^2 b^6}{3^6 a^6} - \frac{2^2 b^4 c}{3^4 a^5} + \frac{2^2 b^3 d}{3^3 a^4} + \frac{b^2 c^2}{3^2 a^4} - \frac{2bcd}{3a^3} + \frac{d^2}{a^2}$$

$$\frac{2^2}{3^3} A_1^3 = \frac{2^2}{3^3} \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \right)^3 = \frac{2^2}{3^3} \left(\frac{c^3}{a^3} - \frac{b^2 c^2}{a^4} + \frac{b^4 c}{3a^5} - \frac{b^6}{3^3 a^6} \right) = \frac{2^2 c^3}{3^3 a^3} - \frac{2^2 b^2 c^2}{3^3 a^4} + \frac{2^2 b^4 c}{3^4 a^5} - \frac{2^2 b^6}{3^6 a^6}$$

$$A_2^2 + \frac{2^2}{3^3} A_1^3 = \frac{2^2 b^3 d}{3^3 a^4} - \frac{b^2 c^2}{3^3 a^4} - \frac{2bcd}{3a^3} + \frac{2^2 c^3}{3^3 a^3} + \frac{d^2}{a^2}$$

$$= \frac{1}{3^4 a^4} \left(3^4 a^2 d^2 - 2 \cdot 3^3 abcd + 2^2 3ac^3 + 2^2 3b^3 d - 3b^2 c^2 \right) \equiv \frac{1}{3^4 a^4} Y$$

よって、

$$X = -2^2 3^3 a^2 d + 2^2 3^2 abc - 2^3 b^3 \quad (9)$$

$$Y = 3^4 a^2 d^2 - 2 \cdot 3^3 abcd + 2^2 3ac^3 + 2^2 3b^3 d - 3b^2 c^2 \quad (10)$$

と置くと、

$$\begin{aligned}
x &= -\frac{b}{3a} + s \left(-\frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{2}\sqrt{A_2^2 + \frac{2^2}{3^3}A_1^3} \right)^{\frac{1}{3}} + t \left(-\frac{1}{2}A_2 - \frac{1}{2}\sqrt{A_2^2 + \frac{2^2}{3^3}A_1^3} \right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{2 \cdot 3a} \left\{ -2b + s \cdot 3a \left(\frac{1}{2^3 3^3 a^3} X + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3^4 a^4} Y} \right)^{\frac{1}{3}} + t \cdot 3a \left(\frac{1}{2^3 3^3 a^3} X - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3^4 a^4} Y} \right)^{\frac{1}{3}} \right\} \\
&= \frac{1}{2 \cdot 3a} \left\{ -2b + s \left(X + 2^2 3a\sqrt{Y} \right)^{\frac{1}{3}} + t \left(X - 2^2 3a\sqrt{Y} \right)^{\frac{1}{3}} \right\} \\
&= \frac{1}{6a} \left\{ -2b + s \left(X + 12a\sqrt{Y} \right)^{\frac{1}{3}} + t \left(X - 12a\sqrt{Y} \right)^{\frac{1}{3}} \right\}
\end{aligned}$$

但し、式 (8) より、

$$(1) z_1^{\frac{1}{3}} z_2^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}A_1 \text{ に対応した計算: } (s, t) = (1, 1), (\omega, \omega^2), (\omega^2, \omega)$$

$$\left(X + 12a\sqrt{Y} \right)^{\frac{1}{3}} \left(X - 12a\sqrt{Y} \right)^{\frac{1}{3}} = (2 \cdot 3a)^2 \left(-\frac{1}{3}A_1 \right) = -2^2 3a^2 \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \right) = 2^2 b^2 - 2^2 3ac = 4b^2 - 12ac$$

$$(2) z_1^{\frac{1}{3}} z_2^{\frac{1}{3}} = -\frac{\omega}{3}A_1 \text{ に対応した計算: } (s, t) = (1, \omega^2), (\omega, \omega), (\omega^2, 1)$$

$$\left(X + 12a\sqrt{Y} \right)^{\frac{1}{3}} \left(X - 12a\sqrt{Y} \right)^{\frac{1}{3}} = (2 \cdot 3a)^2 \left(-\frac{\omega}{3}A_1 \right) = \omega (4b^2 - 12ac)$$

$$(3) z_1^{\frac{1}{3}} z_2^{\frac{1}{3}} = -\frac{\omega^2}{3}A_1 \text{ に対応した計算: } (s, t) = (1, \omega), (\omega, 1), (\omega^2, \omega^2)$$

$$\left(X + 12a\sqrt{Y} \right)^{\frac{1}{3}} \left(X - 12a\sqrt{Y} \right)^{\frac{1}{3}} = (2 \cdot 3a)^2 \left(-\frac{\omega^2}{3}A_1 \right) = \omega^2 (4b^2 - 12ac)$$

以上をまとめると、

3次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (a, b, c, d は実数定数で $a \neq 0$) の解は、

$$\begin{aligned}
X &= -108a^2d + 36abc - 8b^3 & P &= X + 12a\sqrt{Y} \\
Y &= 81a^2d^2 - 54abcd + 12ac^3 + 12b^3d - 3b^2c^2 & Q &= X - 12a\sqrt{Y} \\
\omega &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad \omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} & (\omega^3 &= 1, \quad \omega + \omega^2 = -1)
\end{aligned}$$

と置いて、

$$x_k = \frac{1}{6a} \left(-2b + s_{ik} P^{\frac{1}{3}} + t_{ik} Q^{\frac{1}{3}} \right)$$

但し、以下の3通りの条件のいずれかひとつを採用する。

$$\begin{aligned}
(s_{1k}, t_{1k}) &= (1, 1), (\omega, \omega^2), (\omega^2, \omega) \Rightarrow P^{\frac{1}{3}} Q^{\frac{1}{3}} = 4b^2 - 12ac \\
(s_{2k}, t_{2k}) &= (1, \omega^2), (\omega, \omega), (\omega^2, 1) \Rightarrow P^{\frac{1}{3}} Q^{\frac{1}{3}} = \omega(4b^2 - 12ac) \\
(s_{3k}, t_{3k}) &= (1, \omega), (\omega, 1), (\omega^2, \omega^2) \Rightarrow P^{\frac{1}{3}} Q^{\frac{1}{3}} = \omega^2(4b^2 - 12ac)
\end{aligned}$$